

<問題のねらい>

生徒2人が漫画ドラえもんに登場する未来の道具に関する話題をしている場面である。漫画の1場面から桁数や最高位の数を考察する問題である。

解答記号	高等学校学習指導要領の内容	主に問いたい資質・能力	
		知識・技能	思考力・判断力・表現力
ア～ツ	<p>数学Ⅱ</p> <p>(2) 指数関数・対数関数</p> <p>ア 次のような知識及び技能を身に付けること。</p> <p>(ウ) 対数の意味とその基本的な性質について理解し、簡単な対数の計算をすること。</p> <p>イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。</p> <p>(ア) 指数と対数を相互に関連付けて考察すること。</p> <p>(イ) 二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の日常的特徴や他の事象との関係を考察したりすること。</p>	<p>対数の簡単な計算を理解すること。</p> <p>指数と対数の関係を定義通りに表現すること。</p>	<p>指数関数的に増加する値を、対数の考え方をを用いてその値の概数を考察すること。</p>

以下は、太郎君と花子さんがある漫画の話題について話している会話である。

太郎：花子さん。ドラえもんっていう漫画は知っているよね？その中で、不思議な道具をドラえもんが使っていたんだ。バイバインって言うんだけど知ってる？

花子：知ってる知ってる。栗饅頭にバイバインを1滴垂らすと、5分後に栗饅頭が2倍になる未来の道具だよ。

太郎：そうそう。さらに5分後は、それぞれが2倍になって、合計4個になるんだ。さらに5分後は合計8個になる。

花子：最終的には、栗饅頭が増えすぎて、宇宙空間が栗饅頭でいっぱいになってしまうという面白い漫画の内容だったね。バイバインを垂らしてから、1時間後には栗饅頭は何個になるのかな？

太郎：1時間後の栗饅頭の個数は $2^{\text{ア}}$ 個になるから、これを計算すると イ 個だね。

花子：じゃあ、2時間後の栗饅頭の個数はどうなるかな？2時間後の栗饅頭の個数は $2^{\text{ウ}}$ 個になるから、これを計算すれば、問題解決だね！

太郎：花子さん、 $2^{\text{ウ}}$ を計算するのは大変だね。 $2^{\text{ウ}}$ が何桁の数で、最高位の数か何になるか調べれば、おおよそ何個になるか、考えられそうだね。

花子：よし、まずは $2^{\text{ウ}}$ が何桁の数になるか考えていこう。

<花子さんの解答>

まずは、 $2^{\text{ウ}}$ が n 桁の数の場合は、不等式 $10^{\text{エ}} \text{カ} < 2^{\text{ウ}} \text{キ} < 10^{\text{オ}}$ が成り立つ。

$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いると

$$\log_{10} 2^{\text{ウ}} = \text{ウ} \times \log_{10} 2 = \text{ウ} \times 0.3010 = \text{ク}$$

$$\text{ケ} < \text{ク} < \text{コ}$$

$$\log_{10} 10^{\text{ケ}} < \log_{10} 2^{\text{ウ}} < \log_{10} 10^{\text{コ}}$$

$$10^{\text{ケ}} < 2^{\text{ウ}} < 10^{\text{コ}} \quad \text{よって、} \text{サ} \text{桁の数である。}$$

【問】

- (1) $\text{ア} \sim \text{ウ}$, $\text{ク} \sim \text{サ}$ に当てはまる値を求めよ。
- (2) エ , オ に当てはまるものを次の①～③から1つずつ選べ。
① $n-1$ ② n ③ $n+1$
- (3) カ , キ に当てはまる不等号を①～③から1つずつ選べ。
① $<$ ② \leq ③ $=$

次に、花子さんは $2^{\text{ウ}}$ の最高位の数を求めた。

<花子さんの解答>

$$\log_{10} 2^{\text{ウ}} = \text{ク} \text{ より } 2^{\text{ウ}} = 10^{\text{ク}}$$

$$= 10^{\text{シ}} \times 10^{\text{ス}}$$

ここで、 $10^{\text{セ}} < 10^{\text{ス}} < 10^{0.3010}$

$$1 < 10^{\text{ス}} < \text{ソ}$$

$$10^{\text{シ}} < 10^{\text{シ}} \times 10^{\text{ス}} < \text{ソ} \times 10^{\text{シ}}$$

$$10^{\text{シ}} < 2^{\text{ウ}} < \text{ソ} \times 10^{\text{シ}} \quad \text{よって、最高位の数は } \text{タ} \text{ である。}$$

花子：これで、2時間後に約何個になるか分かったね。

太郎：最後に、栗饅頭の個数が初めて1億個を超えるのは何時間何分後かな？調べてみよう。

【問】

- (1) $\text{ク} \sim \text{ソ}$ に当てはまる値を求めよ。
- (2) 栗饅頭の個数が初めて1億個を超えるのは何時間何分後か。答えよ。『 チ 時間 ツ 分後である。』

【解答欄】

ア	12	イ	4096	ウ	24
エ	0	オ	1	カ	1
キ	0	ク	7.224	ケ	7
コ	8	サ	8	シ	7
ス	0.224	セ	0	ソ	2
タ	1	チ	2	ツ	15