

<問題のねらい>

生徒の解答について、軌跡の問題を生徒同士、生徒と先生が話をしている場面である。問題1は、軌跡の問題の逆の確認について考察する問題である。問題2は、媒介変数表示された式から、条件を満たす軌跡の方程式を求める問題である。

解答記号	高等学校学習指導要領の内容	主に問いたい資質・能力	
		知識・技能	思考力・判断力・表現力
ア～カ	数学Ⅱ (2) 図形と方程式 ア 次のような知識及び技能を身に付けること。 (ウ) 軌跡について理解し、簡単な場合について軌跡を求めること。	軌跡の問題について理解し問題に活用すること。 逆の確認について、正しく理解すること。	与えられた条件から多面的に考え、表現すること。 媒介変数表示された式から、条件を満たす軌跡の方程式を求め、条件を満たさない点を除くこと。
キ～セン (記述)	イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。 (ア) 座標平面上の図形について構成要素間の関係に着目し、それを方程式を用いて表現し、図形の性質や位置関係について考察すること。		

太郎君が解いてきた軌跡の問題について、花子さんと2人で話をしている。

問題1 2点A(6, 1), B(0, 1)からの距離の比が2:1である点Pの軌跡を求めよ。

<太郎君の解答>

点P(x, y)とおく。AP:BP = 2:1 より

$$AP=2BP$$

両辺を2乗して, $AP^2=4BP^2$

$$(x-\text{ア})^2+(y-\text{イ})^2=4\{x^2+(y-\text{ウ})^2\}$$

両辺をそれぞれ展開し, 整理すると

$$\text{点Pは}(x+\text{エ})^2+(y-\text{オ})^2=\text{カ}^2 \dots \text{①} \text{ 上にある。}$$

逆に、円①上のすべての点(x, y)は、条件を満たす。

したがって、点Pの軌跡は中心(-エ, オ), 半径カの円である。

太郎: 波線部「逆に……満たす。」がないと先生が完璧な解答ではないって言っていたね。なぜだろう。

花子: 先生が授業で言ってたじゃない。ある点Pが円①上にあるだけで、①の円上のすべての点が問題の条件を満たすとは限らないよね。だから、逆の確認が必要なんだ。

太郎: 逆の確認が必要だということは分かったけど、求めた式に対して、条件を満たさない点が存在するのかな。

【問】

(1) ア ~ カ にあてはまる値を求めよ。

続いて太郎君は、**問題2**に取り組んだが、分からない所があり、先生に聞くことにした。以下の文は、太郎君と先生のやり取りである。

問題2 (1) 2次関数 $y=x^2-2(t+1)x+2t+6$ の頂点の軌跡を求めよ。

(2) 円 $x^2+y^2-2tx-4ty+6t^2-16=0$ の中心の軌跡を求めよ。

太郎: 先生、授業で見たことがない軌跡の問題です。2次関数や円の方程式の中に変数tが含まれています。

先生: この変数tは媒介変数と呼ばれているもので、変数x, yの間の関数関係を、間接的に表すために用いる変数です。

媒介変数が含まれていても、軌跡の問題を解くときの考え方は同じ。まずは、求める軌跡上の点をP(x, y)とおきましょう。

<太郎君の解答> 頂点をP(x, y)とおく。

$$2\text{次関数 } y=x^2-2(t+1)x+2t+6 \text{ を変形すると, } y=\{x-(t+\text{キ})\}^2-t^2+\text{ク}$$

$$\text{頂点は}(t+\text{キ}, -t^2+\text{ク}) \text{ より } \begin{cases} x=t+\text{キ} \\ y=-t^2+\text{ク} \end{cases} \dots \text{②}$$

②の2式からtを消去すると、求める軌跡は、放物線 $y=\text{ケ}x^2+\text{コ}x+\text{サ}$ となる。

