

<問題のねらい>

生徒の解答について、軌跡の問題を生徒同士、生徒と先生が話している場面である。問題1は、軌跡の問題の逆の確認について考察する問題である。問題2は、媒介変数表示された式から、条件を満たす軌跡の方程式を求める問題である。

解答記号	高等学校学習指導要領の内容	主に問いたい資質・能力	
		知識・技能	思考力・判断力・表現力
ア～カ	数学II (2) 図形と方程式 ア 次のような知識及び技能を身に付けること。 (ウ) 軌跡について理解し、簡単な場合について軌跡を求めること。 イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。 (ア) 座標平面上の図形について構成要素間の関係に着目し、それを方程式を用いて表現し、図形の性質や位置関係について考察すること。	軌跡の問題について理解し問題に活用すること。 逆の確認について、正しく理解すること。	与えられた条件から多面的に考え、表現すること。 媒介変数表示された式から、条件を満たす軌跡の方程式を求め、条件を満たさない点を除くこと。
キ～セゾ (記述)			

太郎君が解いてきた軌跡の問題について、花子さんと2人で話をしている。

問題1 2点A(6, 1), B(0, 1)からの距離の比が2:1である点Pの軌跡を求めよ。

<太郎君の解答>

点P(x, y)とおく。AP:BP = 2:1より

$$AP=2BP$$

両辺を2乗して, $AP^2=4BP^2$

$$(x-\boxed{\text{ア}})^2 + (y-\boxed{\text{イ}})^2 = 4\{x^2 + (y-\boxed{\text{ウ}})^2\}$$

両辺をそれぞれ展開し、整理すると

$$\text{点Pは} (x+\boxed{\text{エ}})^2 + (y-\boxed{\text{オ}})^2 = \boxed{\text{カ}}^2 \dots \text{①} \text{ 上にある。}$$

逆に、円①上のすべての点(x, y)は、条件を満たす。

したがって、点Pの軌跡は中心(-\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}), 半径 \boxed{\text{カ}} の円である。

太郎：波線部「逆に……満たす」がないと先生が完璧な解答ではないって言っていたね。なぜだろう。

花子：先生が授業で言ってたじゃない。ある点Pが円①上にあるだけで、①の円上のすべての点が問題の条件

を満たすとは限らないよね。だから、逆の確認が必要なんだ。

太郎：逆の確認が必要だということは分かったけど、求めた式に対して、条件を満たさない点が存在するのかな。

【問】

(1) \boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{カ}} にあてはまる値を求めよ。

続いて太郎君は、問題2に取り組んだが、分からぬ所があり、先生に聞くことにした。以下の文は、太郎君と先生のやり取りである。

問題2 (1) 2次関数 $y=x^2-2(t+1)x+2t+6$ の頂点の軌跡を求めよ。

(2) 円 $x^2+y^2-2tx-4ty+6t^2-16=0$ の中心の軌跡を求めよ。

太郎：先生、授業で見たことがない軌跡の問題です。2次関数や円の方程式の中に変数tが含まれています。

先生：この変数tは媒介変数と呼ばれているもので、変数x, yの間の関数関係を、間接的に表すために用いる変数です。

媒介変数が含まれていても、軌跡の問題を解くときの考え方方は同じ。まずは、求める軌跡上の点をP(x, y)とおきましょう。

<太郎君の解答> 頂点をP(x, y)とおく。

2次関数 $y=x^2-2(t+1)x+2t+6$ を変形すると、 $y=\left\{x-\left(t+\boxed{\text{キ}}\right)\right\}^2-t^2+\boxed{\text{ク}}$

頂点は $\left(t+\boxed{\text{キ}}, -t^2+\boxed{\text{ク}}\right)$ より

$$\begin{cases} x=t+\boxed{\text{キ}} \\ y=-t^2+\boxed{\text{ク}} \end{cases} \dots \text{②}$$

②の2式からtを消去すると、求める軌跡は、放物線 $y=\boxed{\text{ケ}}x^2+\boxed{\text{コ}}x+\boxed{\text{サ}}$ となる。

太郎：なるほど、簡単簡単。(2)も取り組んでみよう。

<太郎君の解答> 円の中心をP(x, y)とおく。

円の方程式 $x^2 + y^2 - 2tx - 4ty + 6t^2 - 16 = 0$ を変形すると、

$$(x-t)^2 + (y-2t)^2 = \boxed{\text{シ}} t^2 + \boxed{\text{ス}}$$

中心は、(t, 2t)より $\begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases} \dots \text{③}$

③の2式からtを消去すると、求める軌跡は、直線 $y=2x$ となる。

太郎：先生、できました。

先生：惜しい。どちらの問題も軌跡上のすべての点が条件を満たすことの確認をしていないですね。

(1)はどうでしょう。すべての点が条件を満たしていますか。

太郎：媒介変数tの値の範囲はすべての実数だし、すべての点が条件を満たしていると思います。

先生：では、(2)はどうでしょう。

太郎：(1)と同じように媒介変数tの範囲に制限がある…。あっ！よく考えると、円が存在しない範囲もありますね。

先生：よく気が付いたね。円が存在するためには、(円の半径)² セ 0である必要がありますね。

【問】

(2) キ ~ ス にあてはまる値を求めよ。

(3) セ にあてはまる不等号を次のうちから1つ選べ。

① = ② > ③ ≥

(4) 波線部ソについて、求める軌跡は、直線 $y=2x$ の ソ の部分である。

ソ にあてはまる定義域を求めよ。

【解答欄】

ア	6	イ	1	ウ	1
エ	2	オ	1	カ	4
キ	1	ク	5	ケ	-
コ	2	サ	4	シ	-
ス	16	セ		1	
ソ			-4 < x < 4		