＜問題のねらい＞

生徒のレポートをもとに相加相乗平均の大小関係について，話をしている場面である。相加相乗平均の大小関係の証明や公式を用いた最小値について考察する問題である。

<table>
<tr><th rowspan="2">解答記号</th><th rowspan="2">高等学校学習指導要領の内容</th><th colspan="2">主に問いたい資質・能力</th></tr>
<tr><th>知識・技能</th><th>思考力・判断力・表現力</th></tr>
<tr><td>ア～カ</td><td rowspan="4">数学Ⅱ
(1) いろいろな式
イ 次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。
(イ) 実数の性質や等式の性質不等式の性質などを基に，等式や不等式が成り立つことを論理的に考察し，証明すること。</td><td rowspan="4">相加相乗平均の大小関係を，正しく活用すること。</td><td rowspan="4">相加相乗平均の大小関係が成り立つことを，論理的に考察し，証明すること。
誤答を訂正，誤答の原因となる箇所を考察し，正しい解答を表現すること。</td></tr>
<tr><td>キ
(記述)</td></tr>
<tr><td>ク～シ</td></tr>
<tr><td>ス
(記述)</td></tr>
</table>

以下は，太郎君が作成した相加相乗平均の大小関係に関するレポートである。このレポートを完成させなさい。

【相加相乗平均の大小関係のレポート】

a $\boxed{\text{ア}}$ 0，b $\boxed{\text{イ}}$ 0 のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

$\dfrac{a+b}{2}$ を2数 a，b の相加平均，$\sqrt{ab}$ を2数 a，b の相乗平均という。

等号が成立するのは，$\boxed{\text{ウ}}$ のときである。

＜証明＞ $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{\left(\boxed{\text{エ}}\right)^2}{2} \geqq 0$

よって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

等号が成立するのは，$\boxed{\text{エ}}$ $=0$ すなわち $\boxed{\text{ウ}}$ のときである。

(1) $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる不等号を，次の⓪～②からそれぞれ1つ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $=$　① $>$　② $<$

(2) $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる等式を，次の⓪～②から1つ選べ。

⓪ $a=b=0$　① $a=b$　② $a^2=b^2$

(3) $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる式を，次の⓪～③から1つ選べ。

⓪ $a+b$　① $a-b$　② $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　③ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

花子：太郎君の証明は、$\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ を考えたんだね。私はこのように考えたよ。

＜花子さんの証明＞

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{\left(\boxed{\text{カ}}\right)^2}{\boxed{\text{オ}}} \geqq 0$$

よって，$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geqq (\sqrt{ab})^2$ が成り立つ。

$\boxed{\text{キ}}$ より $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

等号が成立するのは，$\boxed{\text{カ}}$ $=0$ すなわち $\boxed{\text{ウ}}$ のときである。

(5) $\boxed{\text{オ}}$ にあてはまる値を求めよ。また，$\boxed{\text{カ}}$ にあてはまる式を次の⓪～③から1つ選べ。

⓪ $a+b$　① $a-b$　② $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　③ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(6) $\boxed{\text{キ}}$ にあてはまる不等式を，記述しなさい。

太郎：そんな証明もあるんだね。花子さんの証明は［　キ　］にあてはまる１文が大事だね。忘れないようにメモをしておこう。ところで，相加相乗平均の大小関係は，どのような問題に活用できるのかな。
花子：よし、問題１に取り組んでみよう。

問題１　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{9}{x}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

太郎：相加相乗平均の大小関係を用いると、最小値は［ク］，そのときの x の値は［ケ］だね。相加相乗平均の大小関係は最小値の問題に活用されているんだ。覚えておこう。
花子：いいね。私も同じ答えになったよ。では、問題２はどう？

問題２　$x>0$ のとき $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ の最小値を求めよ。

【太郎君の考え】

$x>0$，$\dfrac{1}{x}>0$ で，相加相乗平均の大小関係より　$x+\dfrac{1}{x}\geqq$［コ］…①

$x>0$，$\dfrac{9}{x}>0$ で，相加相乗平均の大小関係より　$x+\dfrac{9}{x}\geqq$［サ］…②

①，②の辺々は正なので，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)\geqq$［コ］×［サ］

よって，最小値は［コ］×［サ］である。

花子：ん？太郎君。私は一度展開して考えると，別の値になったよ。どっちが間違っているのかな。
太郎：うーん。①と②のそれぞれの等号成立条件を考えると，［　シ　］ので，僕の考え方は間違っているね。なるほど。相加相乗平均の大小関係を用いる場合は，常に等号成立条件を考えておく必要があるね。

(7)　［ク］～［サ］にあてはまる値を求めよ。

(8)　［　シ　］にあてはまる１文を，下の⓪～③から１つ選べ。

⓪　①の等号を満たす x の値は存在するが，②の等号を満たす x の値は存在しない
①　①の等号を満たす x の値は存在しないが，②の等号を満たす x の値は存在する
②　①の等号を満たす x の値と②の等号を満たす x の値が等しい
③　①の等号を満たす x の値と②の等号を満たす x の値が異なる

(9)　太郎君と花子さんが答え合わせをすると，太郎さんの解答が間違っていた。破線部 一度展開して考える に注意して，正しい最小値を求めよ。ただし，途中の計算過程も記述しなさい。　解答番号［　ス　］

【解答欄】

ア	1	イ	1	ウ	1
エ	3	オ	4	カ	1
キ	$\frac{a+b}{2}>0,\sqrt{ab}>0$				

ク	6	ケ	3	コ	2	サ	6	シ	3

ス

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)=x^2+\frac{9}{x^2}+10$

$x^2>0,\ \frac{9}{x^2}>0$ で相加相乗平均の関係より

$x^2+\frac{9}{x^2}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{9}{x^2}}=6$

$x^2+\frac{9}{x^2}+10\geqq 16$

よって，$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)\geqq 16$

等号成立は，$x^2=\frac{9}{x^2}$

$x>0$ より $x=\sqrt{3}$ のとき

最小値　16 ($x=\sqrt{3}$ のとき)